|  |
| --- |
| **RUANG VEKTOR**  **Pertemuan : 9-10**  TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :   1. Mengetahui sifat-sifat dan operasi vektor di R2 dan R3. 2. Mengetahui aksioma ruang vektor dan syarat subruang. 3. Mengidentifikasi suatu himpunan vektor sebagai suatu ruang vektor atau subruang vektor . 4. Mengidentifikasi suatu himpunan vektor membangun dan bebas linear. 5. Menentukan matriks transisi dari perubahan basis. 6. Menentukan basis dan dimensi dari himpunan vektor-vektor yang merupakan anggota dari suatu ruang vektor atau subruang. 7. Menentukan ruang baris, ruang kolom, ruang null dan dimensinya. |

**Materi :**

* 1. **Vektor di R2 dan R3**

Secara geometris vektor digambarkan sebagai ruas garis berarah.

Perhatikan gambar berikut ini :



Titik *O* disebut titik pangkal vektor dan titik *A* disebut titik ujung

Vektor dengan titik pangkal *O* dan titik ujung *A* dinotasikan dengan atau dapat dituliskan dengan huruf kecil 

A

O

**Contoh 3.1**

Di dalam sistem koordinat vektor dapat digambarkan sebagai berikut:

Vektor dalam Ruang Berdimensi 2 (R2)

Y

A

Titik Ujung



X

O

O

Titik Pangkal

Vektor dalam Ruang Berdimensi 3 (R3)

Z

Titik Ujung

B

O

B

****

Titik Pangkal

A

Y

X

 disebut **vektor standar** karena titik pangkal vektor tersebut berada pada titik *O*.

**Definisi 3.1**

Berikut ini adalah cara menghitung norma atau panjang dari suatu vektor yang berada di R2 dan di R3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Vektor | Panjang vektor di R2 | Panjang vektor di R3 |
|  | *A* = dan *B* = | *A* = dan *B* = |
| Vektor | Panjang vektor di R2 | Panjang vektor di R3 |
|  |  |  |

Konsep vektor ini dapat diperluas hingga ke Rn , Rn sering dikenal dengan **ruang Euclidis**.

Penjelasan tentang konsep ruang akan dijelaskan pada subbab berikutnya.

* 1. **Operasi –Operasi Vektor**

Seperti halnya di dalam matriks, di dalam vektor juga ada operasi yang bisa dilakukan. Diantaranya adalah :

1. **Penjumlahan Vektor**

Cara segitiga



 





Cara jajaran genjang

  





1. **Perkalian Vektor dengan Skalar**

****

****

1. **Vektor Negatif**

 ****

**✍ Latihan 3.1**

Misalkan . Hitunglah ekspresi yang ditunjukkan:

1. ****
2. ****
3. 
4. 
5. 
   1. **Ruang Vektor dan Sub Ruang Vektor**

Vektor – vektor yang dikumpulkan dalam suatu himpunan dan mempunyai sifat-sifat yang sama disebut dengan ruang vektor. Untuk mengenali himpunan yang diamati sebagai ruang vektor maka perlu diketahui terlebih dahulu sifat-sifat yang harus dimiliki oleh ruang vektor dan subruang. Pengetahuan tentang ruang vektor dan subruang akan membantu kita untuk mengenali bentuk dan karakteristik dari solusi sistem persamaan linear yang dicari. Berikut ini diberikan definisi dari ruang vektor dan subruang.

**Aksioma 3.1**

Misalkan *V* suatu **himpunan** tak kosong dimana operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan, jika untuk setiap  anggota *V* dan α,β adalah skalar berlaku:

1. 
2. 
3. ****
4. ****
5. 
6. α skalar, 
7. 
8. 
9. 
10. 

Maka *V* disebut **ruang vektor** dan anggota dalam *V* disebut **vektor**.

**Contoh 3.2:**

1. Misalkan adalah himpunan vektor-vektor yang didefinisikan sebagai berikut

Aturan perkalian skalar  dan aturan penjumlahan 

Maka dapat dilihat bahwamemenuhi semua aturan dari aksioma 3.1., sehingga disebut dengan ruang vektor.

1. Misalkan  dan didefinisikan aturan perkalian skalar

 dan aturan penjumlahan 

Dapat ditunjukkan bahwa adalah ruang vektor matriks yang sering disebut dengan ruang matriks.

1. Misalkan dan didefinisikan aturan perkalian skalar  dan aturan penjumlahan



Jika diberikan suatu ruang vektor *V*, maka kita dapat membentuk ruang vektor lain *S* yang merupakan himpunan bagian dari *V* dan menggunakan operasi-operasi pada *V*.

**Definisi 3.2**

Jika *S* adalah himpunan bagian tidak kosong dari suatu ruang vektor *V* dan *S* memenuhi syarat-syarat berikut ini maka berlaku :

1. jika untuk sembarang skalar .
2. jika dan .

maka *S* disebut **subruang** dari *V*.

**Contoh 3.3:**

Misalkan *S* =. Tunjukkan *S* adalah subruang dari *R*2.

Penyelesaian:

Ambil dan maka

1. 
2. 

Dari 1. dan 2. Terbukti *S* =adalah subruang dari *R*2.

**Contoh 3.4:**

Diketahui *K* =. Periksalah apakah *K* adalah subruang dari *R*2.

*K* bukan subruang dari *R*2 karena terdapat dan  sehingga .

**✍ Latihan 3.2**

1. Periksa apakah himpunan berikut adalah subruang dari *R*3 .
2.  b. 
3. Periksa apakah himpunan berikut adalah subruang dari *M*2x2 (*M*2x2 adalah ruang matriks yang semua anggotanya berukuran 2 x 2)
4.  b. 
5. Periksa apakah himpunan berikut adalah subruang dari *P2*.
6.  b. 
   1. **Kombinasi Linear dan Membangun**

Lebih lanjut akan dijelaskan bahwa solusi dari SPL (khususnya SPL dengan jumlah solusi takhingga banyaknya) akan membentuk suatu subruang. Solusi SPL ini dapat dituliskan kembali dalam bentuk penjumlahan dan perkalian skalar antar basis. Untuk itu sebelum menjelaskan konsep basis, berikut ini diperkenalkan terlebih dahulu mengenai istilah kombinasi linear, membangun dan bebas linear dari vektor-vektor kolom.

**Definisi 3.3**

Suatu vektor disebut suatu kombinasi linear dari vektor-vektor jika bisa dinyatakan dalam bentuk :



Dengan adalah skalar.

**Contoh 3.5:**

Diketahui dan dalam *R*3. Periksalah apakah dan adalah kombinasi linear dari vektor dan .

Penyelesaian:

1. Jika adalah kombinasi linear dari vektor dan  maka dapat dituliskan ke dalam bentuk sehingga diperoleh

 ->  -> 

Dengan menyamakan komponen-komponen diperoleh

 

Sehingga diperoleh  dan . Karena dan memenuhi ketiga persamaan maka adalah kombinasi linear dari vektor dan .

1. Jika adalah kombinasi linear dari vektor dan  maka dapat dituliskan ke dalam bentuk sehingga diperoleh

 ->  -> 

Dengan menyamakan komponen-komponen diperoleh

 

Jelas bahwa SPL ini tidak mempunyai solusi sehingga  bukan kombinasi linear dari vektor dan .

**✍Latihan 3.3**

Diketahui , dan , nyatakan vektor-vektor berikut ini sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor .

1.  b. 

**Definisi 3.4**

Diketahui *V* adalah ruang vektor dan dimana . *S* dikatakan **membangun (merentang)** *V* jika , merupakan kombinasi linear dari *S*, yaitu :



 disebut **ruang rentang** dan  disebut **rentang** dari *V*.

**Contoh 3.6**:

Apakah membangun di *R*3?

Penyelesaian:

Misalkan  membangun maka untuk sembarang vektor akan ditunjukkan bahwa vektor  adalah kombinasi linear dari , sehingga dapat dituliskan



Atau dalam bentuk matriks dapat dituliskan menjadi



Persamaan linear ini akan konsisten jika tidak ada baris 0 pada matriks *A* setelah dilakukan reduksi baris.

Dengan OBE diperoleh



Karena ada baris yang 0 maka pastilah ada vekor di yang bukan merupakan kombinasi linear dari . Jadi  tidak membangun di .

**✍Latihan 3.4**

Diketahui . Apakah membangun di R3?

* 1. **Bebas Linear dan Bergantung Linear**

**Definisi 3.5**

Misalkan *S* = {}adalah suatu himpunan vektor-vektor tak kosong, vektor-vektor disebut **bebas linear** jika untuk persamaan vektor  mempunyai satu-satunya penyelesaian yaitu



**Definisi 3.6**

Misalkan *S* = {}adalah suatu himpunan vektor-vektor tak kosong, vektor-vektor disebut **bergantung linear** jika terdapat skalar-skalar yang tidak semuanya nol sehingga .

**Contoh 3.7:**

1. Vektor-vektor dan  adalah bebas linear karena jika

 maka  dan  sehingga diperoleh 

1. Diketahui dua vektor  dan maka



 misalkan  maka 

Maka kedua vektor bergantung linear. Atau tanpa menyelesaikan sistem persamaan linear dapat ditunjukkan bahwa determinan dari matriks koefisiennya = 0 maka sistemnya punya penyelesaian tak-trivial.

**✍ Latihan 3.5**

Periksalah apakah vektor-vektor berikut ini bebas linear atau bergantung linear

1.  b. 
   1. **Basis dan Dimensi**

**Definisi 3.7**

Misalkan *V* ruang vektor dan . *S* disebut **basis** dari *V* jika memenuhi dua syarat, yaitu :

1. *S* bebas linear
2. *S* membangun *V*

Basis dari suatu ruang vektor bisal lebih dari satu. Ada dua macam basis yang kita kenal, yaitu:

1. Basis standar

**Contoh 3.8:**

*  dimana adalah anggota vektor sehingga  adalah basis standar dari .
* adalah basis dari .
* Didalam dan , basis standar sering dituliskan menjadi .

1. Basis tidak standar

**Definisi 3.8**

Suatu ruang vektor tak nol *V* disebut **berdimensi terhingga** jika *V* berisi suatu himpunan vektor terhingga  yang membentuk suatu basis. Jika tidak ada himpunan seperti itu maka *V* disebut berdimensi tak hingga. Ruang vektor nol berdimensi hingga.

**Teorema 3.1**

Jika *V* adalah suatu ruang vektor berdimensi terhingga dan adalah sembarang basis, maka:

1. Setiap himpunan yang lebih dari *n* vektor adalah tak bebas linear.
2. Tidak ada himpunan dengan vektor yang kurang dari *n* yang membangun *V*.

**Teorema 3.2**

Semua basis untuk suatu ruang vektor berdimensi terhingga mempunyai jumlah vektor yang sama.

**Definisi 3.9**

Dimensi suatu ruang vektor berdimensi terhingga *V*, yang dinyatakan dengan dim(*V*), didefinisikan sebagai jumlah vektor dalam suatu basis untuk *V*.

**Teorema 3.3**

Jika *V* adalah suatu ruang vektor berdimensi *n* , dan jika *S* adalah suatu himpunan dalam *V* dengan tepat *n* vektor, maka *S* adalah suatu basis untuk *V* jika *S* merentang *V* atau *S* bebas linear.

**Contoh 3.9:**

Misalkan . Tunjukkan bahwa himpunan *S=*{} adalah suatu basis dari *R*3.

**Penyelesaian:**

Untuk menunjukkan bahwa himpunan *S* membangun *R*3 akan ditunjukkan bahwa untuk sembarang bisa dinyatakan sebagai kombinasi linear



Sehingga diperoleh 



Dengan menyamakan komponen-komponen berpadanan diperoleh:



Untuk menunjukkan bahwa *S* membangun *R*3 harus ditunjukkan bahwa sistem persamaan linear diatas punya penyelesaian untuk semua .

Untuk menunjukkan bebas linear maka jika



Maka 

Karena dim *R*3 = 3 dan jumlah anggota *S* = 3, maka kita hanya perlu menunjukkan bahwa vektor-vektornya saling bebas linear atau membangun. Dengan menunjukkan matriks koefisiennya punya determinan tidak nol, maka dikatakan *S* bebas linear dan membangun





Jadi *S* adalah basis untuk *R*3.

**✍Latihan 3.6**

1. Tunjukkan bahwa  adalah basis *R*3
2. Periksa apakah  adalah basis bagi 
   1. **Vektor Koordinat dan Matriks Transisi**

Banyak masalah aplikasi disederhanakan dengan cara mengubah suatu sistem koordinat ke sistem koordinat lain. Prinsip mengubah sistem koordinat dalam suatu ruang vektor prinsipnya sama dengan mengubah dari suatu basis ke bentuk basis lainnya. Untuk itu diberikan pengertian dari vektor koordinat dan matriks transisi yang berkaitan dengan perpindahan basis ke basis yang lain.

**Definisi 3.10**

Misalkan *V* adalah suatu ruang vektor dengan basis *B* =  dan . Vektor koordinat  terhadap basis *B* adalah :



Dimana 

**Contoh 3.10:**

Tentukan vektor koordinat terhadap basis 

**Penyelesaian**

Koordinat  terhadap *B* adalah vektor yang memenuhi



Sehingga diperoleh matriks augmentednya



Jadi 

Perhatikan bahwa urutan vektor di basis menentukan vektor koordinat. Jika



Maka vektor koordinat *v* terhadap *B’* adalah



**✍Latihan 3.7**

Tentukan koordinat relatif dari (3,2,5)T terhadap basis .

**Teorema 3.4**

Koordinat vektor terhadap suatu basis tertentu adalah tunggal.

**Definisi 3.11**

Pandang dan untuk ruang vektor *V*. Matriks transisi dari *B* ke *U* adalah



Dan memenuhi persamaan

 

Matriks *P* adalah matriks tak singular dan *P*’ adalah matriks transisi dari *U* ke *B*.

**Contoh 3.11:**

1. Carilah matriks transisi dari perubahan basis ke dimana

 dan 

1. Jika  tentukan 

**Penyelesaian**

1. Kita dapat menuliskan masing-masing basis ke dalam 



Dengan mensubstitusi  dan  diperoleh dua persamaan sebagai berikut:

 dan 

Dari persamaan ini diperoleh  dan 

Sehingga diperoleh adalah matriks transisi dari basis ke .

1. Dapat ditunjukkan pula bahwa



**✍Latihan 3.8**

1. Dari contoh diatas tentukan matriks transisi dari basis ke
2. Misalkan adalah basis dan 



a. Tentukan matriks transisi dari  ke 

b. Jika , tentukan koordinat dari relatif terhadap 

* 1. **Rank dan Nulitas**

**Definisi 3.12**

Jika *A* adalah matriks *m*x*n* maka subruang yang direntang oleh vektor-vektor baris dari *A* disebut *ruang baris* dari *A*. Subruang dari yang direntang oleh vektor-vektor kolom dari *A* disebut *ruang kolom* dari *A*. Ruang penyelesaian dari sistem persamaan homogen adalah subruang dari disebut ruang null/ruang kosong dari *A* dinotasikan *N*(*A*) .

**Contoh 3.12**

Misalkan 

Ruang baris dari *A* adalah himpunan dari



Ruang kolom dari *A* adalah himpunan semua vektor yang berbentuk



**Teorema 3.5**

Operasi baris elementer tidak mengubah ruang null dari suatu matriks

Operasi baris elementer tidak mengubah ruang baris suatu kolom

**Contoh 3.13:**

Diketahui 

Tentukan basis untuk ruang kosong *A* (*N*(*A*))

**Penyelesaian**

Menggunakan operasi baris elementer diperoleh matriks *U* yang merupakan matriks bentuk eselon baris tereduksi dari *A*.



Karena persamaan ekivalen dengan (**berdasarkan Teorema 3.5**) maka jika dan hanya jika

sehingga 

Misalkan  dan maka vektor-vektor  berbentuk



Jadi basis untuk adalah dan 

**Teorema 3.6**

Jika suatu matriks *U* berada dalam bentuk baris eselon maka vektor-vektor baris dengan utama 1 (yaitu vektor-vektor tak-nol) membentuk suatu basis untuk ruang baris *U* dan vektor-vektor kolom dengan utama 1 dari vektor-vektor baris membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari *U*.

**Teorema 3.7**

Jika *A* dan *B* adalah matriks yang ekivalen baris maka

1. Suatu himpunan vektor kolom dari *A* yang bebas linear jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yang berpadanan dari *B* juga bebas linear.
2. Suatu himpunan vektor kolom dari *A* yang diberikan membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari *A* jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yang berpadanan dari *B* membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari *B*.

Berdasarkan teorema 3.6 , teorema 3.7 dan teorema 3.5 maka kita dapat menentukan basis dari suatu matriks *A*  dengan cara

Diketahui himpunan vektor *S* = {}

1. Bentuk matriks *A* yang mempunyai vektor sebagai vektor-vektor kolomnya
2. Reduksi matriks *A* menjadi matriks baris eselon tereduksi *R* dan anggaplah adalah vektor-vektor kolom dari *U*.
3. Kenali kolom-kolom yang mengandung utama 1 di *U*. Vektor-vektor yang berpadanan dari *A* merupakan vektor-vektor basis yang membangun *S*.
4. Nyatakan setiap kolom dari *U* yang tidak mengandung utama 1 sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor kolom yang mengandung utama 1. Persamaan yang berpadanan untuk vektor-vektor kolom dari *A* menyatakan bahwa vektor-vektor yang tidak ada dalam basis tersebut dapat diperoleh dari kombinasi linear dari vektor-vektor basisnya.

**Definisi 3.13**

*Rank* dari suatu matriks *A* adalah dimensi dari ruang baris/ruang kolom dari *A*. *Nulitas* adalah dimensi dari ruang nol.

Pada umumnya jumlah rank dan nulitas akan selalu sama dengan banyak kolom dari matriks.

**Teorema 3.8**

Jika *A* adalah matriks *m* x *n*, maka rank dari *A* ditambah nulitas dari *A* sama dengan *n*.

**Contoh 3.14**

Diketahui 

Tentukan

1. Semua vektor baris dan vektor kolom dari *A*
2. Basis dan dimensi dari ruang kolom *A*
3. Basis dan dimensi dari ruang baris *A*

**Penyelesaian**

1. Vektor baris : 

Vektor kolom : 

1. 

Bilangan utama 1 ada pada semua kolom pada matriks *U* sehingga basis dari ruang kolom adalah  dan dimensi ruang kolomnya adalah 3.

1. 

Bilangan utama satu terletak pada kolom ke-1,2,3 maka basis dari ruang baris *A* adalah  dan dimensi ruang baris *A* adalah 3.

**✍Latihan 3.9**

1. Tentukan basis dan dimensi dari ruang kosong *A* jika ada



1. Tentukan basis ruang kolom, basis ruang baris dan rank dari matriks *A* berikut ini



1. Tentukan basis dari ruang yang direntang oleh vektor – vektor berikut ini



